

---

Ehrhard Behrends

# Elementare Stochastik

Ein Lernbuch –  
von Studierenden mitentwickelt

 Springer Spektrum

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsräume</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Wie wird der Zufall modelliert?</b>	<b>3</b>
1.1	Ein sehr naiver Ansatz: Zufallsautomaten . . . . .	4
1.2	Die Präzision: $\sigma$ -Algebren . . . . .	6
1.3	Wahrscheinlichkeitsräume: Eigenschaften . . . . .	11
1.4	Erzeugte $\sigma$ -Algebren . . . . .	14
1.5	Borelmengen . . . . .	17
1.6	Zwei wichtige Beweistechniken . . . . .	21
1.7	Ergänzungen . . . . .	26
1.8	Verständnisfragen . . . . .	30
1.9	Übungsaufgaben . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Erste Beispiele</b>	<b>37</b>
2.1	Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume . . . . .	37
2.2	Wahrscheinlichkeitsdichten . . . . .	42
2.3	Simulation diskreter Räume . . . . .	52
2.4	Simulation: Räume mit Dichtefunktionen . . . . .	56
2.5	Ergänzungen . . . . .	62
2.6	Verständnisfragen . . . . .	64
2.7	Übungsaufgaben . . . . .	65
<b>II</b>	<b>Wichtige Konzepte</b>	<b>69</b>
<b>3</b>	<b>Zufallsvariable</b>	<b>71</b>
3.1	Was ist eine Zufallsvariable? . . . . .	71
3.2	Induzierte Wahrscheinlichkeitsräume . . . . .	75
3.3	Erwartungswert, Varianz und Streuung . . . . .	79
3.4	Elementare Kombinatorik . . . . .	91
3.5	Berechnung induzierter Wahrscheinlichkeiten . . . . .	97
3.6	Ergänzungen . . . . .	106
3.7	Verständnisfragen . . . . .	109
3.8	Übungsaufgaben . . . . .	111

<b>4</b>	<b>Bedingte Wahrscheinlichkeiten</b>	<b>115</b>
4.1	Bedingte Wahrscheinlichkeiten: die Idee . . . . .	116
4.2	Der Satz von Bayes . . . . .	122
4.3	Unabhängigkeit für mehr als zwei Ereignisse . . . . .	128
4.4	Unabhängigkeit für Zufallsvariable . . . . .	134
4.5	Der „Klonsatz“ . . . . .	141
4.6	Folgerungen aus der Unabhängigkeit . . . . .	146
4.7	Verständnisfragen . . . . .	156
4.8	Übungsaufgaben . . . . .	157
<b>III</b>	<b>Binomial- und Exponentialverteilung</b>	<b>163</b>
<b>5</b>	<b>Die Binomialverteilung</b>	<b>165</b>
5.1	Binomialverteilung: Definition . . . . .	166
5.2	Hypergeometrische Verteilung: Approximation . . . . .	169
5.3	Approximation durch die Poissonverteilung . . . . .	171
5.4	Der Satz von de Moivre-Laplace . . . . .	175
5.5	Verständnisfragen . . . . .	185
5.6	Übungsaufgaben . . . . .	186
<b>6</b>	<b>Die Exponentialverteilung</b>	<b>189</b>
6.1	Gedächtnislose Wartezeiten . . . . .	189
6.2	Kombinationen gedächtnisloser Wartezeiten . . . . .	194
6.3	Diskrete gedächtnislose Wartezeiten . . . . .	200
6.4	Verständnisfragen . . . . .	203
6.5	Übungsaufgaben . . . . .	204
<b>IV</b>	<b>Der Zufall verschwindet im Unendlichen</b>	<b>207</b>
<b>7</b>	<b>Konvergenz von Zufallsvariablen</b>	<b>209</b>
7.1	Konvergenz in Wahrscheinlichkeit . . . . .	210
7.2	Fast sicher punktweise Konvergenz . . . . .	211
7.3	Konvergenz in Verteilung . . . . .	213
7.4	Verständnisfragen . . . . .	219
7.5	Übungsaufgaben . . . . .	220
<b>8</b>	<b>Die Gesetze der großen Zahlen</b>	<b>223</b>
8.1	Die Lemmata von Borel-Cantelli . . . . .	224
8.2	Das schwache Gesetz der großen Zahlen . . . . .	230
8.3	Das starke Gesetz der großen Zahlen . . . . .	237
8.4	Der zentrale Grenzwertsatz . . . . .	244
8.5	Der Satz vom iterierten Logarithmus . . . . .	255
8.6	Ergänzungen . . . . .	260
8.7	Verständnisfragen . . . . .	263
8.8	Übungsaufgaben . . . . .	265

<b>V Grundlagen der Statistik</b>	<b>267</b>
<b>9 Beschreibende Statistik</b>	<b>271</b>
9.1 Statistische Daten . . . . .	271
9.2 Visualisierung von statistischen Daten . . . . .	272
9.3 Stichprobenmittel und Stichprobenvarianz . . . . .	275
9.4 Korrelation und Regression . . . . .	279
9.5 Verständnisfragen . . . . .	284
9.6 Übungsaufgaben . . . . .	285
<b>10 Schätzen</b>	<b>289</b>
10.1 Das statistische Modell, Schätzfunktionen . . . . .	290
10.2 Güteeigenschaften für Schätzer . . . . .	293
10.3 Beispiele für Punktschätzer . . . . .	300
10.4 Konfidenzbereiche . . . . .	304
10.5 Konfidenzintervalle: Normalverteilung . . . . .	307
10.6 Verständnisfragen . . . . .	314
10.7 Übungsaufgaben . . . . .	315
<b>11 Entscheiden</b>	<b>317</b>
11.1 Hypothesen . . . . .	317
11.2 Testfunktionen . . . . .	320
11.3 Neyman-Pearson-Theorie . . . . .	326
11.4 Verständnisfragen . . . . .	333
11.5 Übungsaufgaben . . . . .	334
<b>12 Nichtparametrische Statistik</b>	<b>337</b>
12.1 Der $\chi^2$ -Anpassungstest . . . . .	338
12.2 Der $\chi^2$ -Test auf Unabhängigkeit . . . . .	341
12.3 Rangtests . . . . .	342
12.4 Der Kolmogoroff-Smirnoff-Test . . . . .	346
12.5 Verständnisfragen . . . . .	349
12.6 Übungsaufgaben . . . . .	350
<b>Anhänge</b>	<b>353</b>
Mengenlehre . . . . .	353
Vereinigungen von $\sigma$ -Algebren . . . . .	354
Maßtheorie . . . . .	356
Das Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ . . . . .	359
Analysis . . . . .	359
Tabellen . . . . .	362
Die Computerprogramme zum Buch . . . . .	369
Literatur . . . . .	370
<b>Register</b>	<b>371</b>